

DRE GRAND-LOME	DEVOIR SURVEILLÉ DU 1^{er} SEMESTRE	A/S : 2025-2026
LYCÉE SEGBE	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES Classe : T^{le} D Coef : 3	DURÉE : 4h00

Exercice 1 : 8pts

M. DIM est propriétaire de trois terrains muni chacun d'un repère orthonormé. Le premier terrain est limité par l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $\frac{z+12i}{z-20}$ est un nombre imaginaire pur avec $z = x + iy$. Le second terrain est limité par l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $|z-2-3i| = 8$ avec $z = x + iy$. Le troisième terrain a la forme d'un carré dont la longueur du côté est l'unique solution réelle de l'équation (E) : $z^3 - (10+3i)z^2 - (2-30i)z + 20 = 0$ d'inconnue $z = x + iy$. M. DIM décide d'entourer les deux premiers terrains d'un tour de fil barbelé dont le mètre coûte 500F sur le marché. Sur le troisième terrain, il plante les rejetons de bananes plantains coûtant 300F l'unité à raison de 4 rejetons par mètre carré. Par ailleurs, M. DIM est propriétaire aussi d'une entreprise du coin qui fabrique les objets d'art. cette entreprise peut fabriquer en un mois entre 50 et 120 objets d'art. On a modélisé le bénéfice de cette entreprise par la fonction $h(x) = -x + 3000 - \frac{8100}{x}$ où x est le nombre d'objets et $x \in [50; 120]$

Consigne 1 : Aide M. DIM à trouver le montant total à déboursier pour réaliser ces travaux

Consigne 2 : Le Bénéfice maximal de cette entreprise en un mois peut-il permettre à M DIM de financer ces travaux?

Données complémentaires : Prendre $\pi = 3, 14$ et l'unité de longueur est décamètre.

Grille de notation : $\begin{cases} \text{Consigne 1 : } CM1 = 1, 25pt; & CM2 = 1, 25pt; & CM3 = 1pt; & CP = 0, 5pt \\ \text{Consigne 2 : } CM1 = 1, 25pt; & CM2 = 1, 25pt; & CM3 = 1pt; & CP = 0, 5pt \end{cases}$

Exercice 2 : 6pts

I/ Choisis la bonne réponse parmi les propositions A) B) C) et D) ($0, 5pt \times 9$)

1) Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2; 2] \\ \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} - x + m & \text{si } x \in [2; +\infty[\end{cases}$ où m est un paramètre réel. La valeur de m pour que f soit continue en 2 est : A) 2 B) -2 C) 4 D) 1

2) Soit le nombre complexe $z = -2e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors A) $\arg(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ B) $\arg(\frac{1}{z}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ C) $\arg(\frac{1}{z}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ D) $\arg(\frac{1}{z}) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

3) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f a, au voisinage de $-\infty$ une asymptote d'équation : A) $y = -x + 1$ B) $y = x - 1$ C) $y = -x$ D) $y = -x - 1$

4) L'ensemble de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{3 - |x - 1|}$ est : A) $] -2; 4[$ B) $] -2; 1[\cup] 1; 4[$ C) $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ D) $] 1; 4[$

5) Soit z un nombre complexe tel que $z = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. Alors z^2 est égale à A) $-4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$ B) $-4 + 4i\sqrt{2}$ C) $4 - 4i\sqrt{2}$ D) $8 - 4i\sqrt{2}$

6) Le nombre complexe $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine A) huitième de 1 B) sixième de 1 C) quatrième de 1 D) cinquième de 1

7) Soit h la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = \sin x$. $(h^{-1})'(\frac{1}{2})$ est égale à

- A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

8) L'ensemble des points d'affixe le nombre complexe z tel que $|\bar{z} + 2 - i| = |z - 1 - 3i|$ est

- A) la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(-2 - i)$ et $B(1 + 3i)$ B) la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2 - i)$ et $B(1 - 3i)$ C) la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2 + i)$ et $B(-1 - 3i)$ D) la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2 + i)$ et $B(1 + 3i)$

9) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{1 - x}$. Alors la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est :

- A) -1 B) $-\infty$ C) $+\infty$ D) 0

II/ Complète sans recopier le texte (0, 25pt × 6)

E est une partie de $\mathbb{N}$, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée s'il existe un nombre réel m tel que $\forall n \in E, \dots$ a $\dots$ Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\dots$ b $\dots$ si elle est à la fois minorée et majorée.

Les racines carrées d'un nombre complexe sont deux nombres complexes $\dots$ c $\dots$. L'argument principal d'un nombre complexe non nul appartient à $\dots$ d $\dots$

Si g est une fonction continue et strictement $\dots$ e $\dots$ sur un intervalle I , alors g est $\dots$ f $\dots$ de l'intervalle I sur $f(I)$

Exercice 3 : 6pts

I/

Soit la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. 1a) Montrer que $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 0, 25pt

b) Dresser le tableau de variation de f 0, 75pt

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; +\infty[$ une unique solution α puis vérifie que $1 \leq \alpha \leq 2$ 1pt

3) On suppose que pour tout $x \in [1; 2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$ 0, 5pt

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} |u_n - \alpha|$ 0, 5pt

c) Dédurre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$ 0, 5pt

d) Calculer la limite de la suite (u_n) 0, 5pt

II/

On considère le nombre $U = -3 + 3i$

1) Calculer le module et l'argument de U

2a) Déterminer le complexe Z tel que $U \cdot Z = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ 1pt

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ 1pt